Physicae Organum, v. 8, n. 2, p. 138-155, Brasília, 2022.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

PHYSICÆ ORGANUM Editorial

Editoração Científica

Diagrama espaço tempo de Minkowski: uma abordagem para o Ensino Médio

Minkowski spacetime diagram: an approach to high school.

P. M. Barros[1], V. C. Andrade[1]

[1]Instituto de Física – Universidade de Brasília

Resumo

Este trabalho apresenta inicialmente uma explanação sobre a teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard, que discute os níveis de saberes e suas transformações. Após, é realizada uma discussão da métrica de Minkowski e sua relação com a relatividade de Einstein. Em seguida os diagramas espaço-tempo de Minkowski são apresentados. Por fim, baseado nas discussões anteriores, é apresentada uma sequência didática onde o diagrama Espaço Tempo de Minkowski é discutido com uma linguagem adequada para estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: *Minkowski. Relatividade. Transposição Didática.*

Abstract

This work initially presents an explanation of Yves Chevallar's Didactic Transposition theory, this theory discusses the levels of knowledge and their transformations. Afterwards, a discussion of the Minkowski metric and its relationship with Einstein's relativity is carried out. Next, Minkowski space-time diagrams are presented. Finally, based on the previous discussions, a didactic sequence is presented where the Minkowski Space-Time diagram is discussed in a language suitable for high school students.

Keywords: *Minkowski. Relativity. Didactic Transposition.*

I. Introdução

Observa-se uma dificuldade em desenvolver temas da Física Moderna no Ensino Médio. Mesmo após vários trabalhos acadêmicos sugerindo formas de inserção destes tópicos na educação básica, ainda não se verifica, seja nos livros didáticos ou na própria sala de aula, uma forma onde professores e estudantes se sintam confortáveis no processo de ensino e aprendizagem.

Pietrocola (2005) discute se as regras da transposição didática são aplicáveis para a Física Moderna. No seu trabalho são apresentados os conflitos da adequação da matemática necessária para desenvolver alguns temas e o nível matemático do estudante do Ensino Médio.

Silva (2017) traz, no seu artigo publicado na Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada, a importância da contribuição de Minkowski para a Relatividade de Einstein como também o sentido dado para Relatividade a partir do diagrama espaço-tempo de Minkowski.

A teoria da transposição didática foi objeto de discussão de vários trabalhos acadêmicos, Weckerlin, E. R; Machado, V. M. (2013), realizaram uma análise de publicações em revistas on-line classificadas com estrato A1. Eles encontraram 43 trabalhos com citações das teorias de Chevallard. Mesmo sendo repetidamente aplicada, Weckerlin defende a importância da transposição didática, uma vez que o professor traz um novo ângulo de observação do ensino.

Neste trabalho será proposta uma discussão sobre a transposição didática, de forma geral e também de forma específica para conceitos da física moderna.

No primeiro capítulo serão analisados os pontos mais relevantes sobre a teoria da transposição didática de Yves Chevallard.

No capítulo seguinte será descrita a métrica de Minkowski. E no próximo o diagrama espaço-tempo. Neste capítulo são inseridos exemplos que já favorecem o processo de ensino-aprendizagem.

No capítulo 4 será apresentada uma proposta de transposição didática a partir de uma sequência didática do diagrama espaço-tempo de Minkowski aplicada ao Ensino Médio.

II. Transposição Didática – Yves Chevallard

Yves Chevallard (1991) evidencia que o saber que chega à sala de aula sofre deformações em relação ao saber científico. Isto porque ele passa por uma transformação, ou melhor, uma adequação visando o estudante. Os protagonistas da transposição didática são os pesquisadores, professores, técnicos, especialistas, ou seja, aqueles que irão escolher os saberes que serão ensinados e como serão ensinados. Este grupo constitui a Noosfera.

A Figura 1 mostra o caminho e as transformações do saber. Quando produzido é chamado de Saber Científico/Sábio, quando chega à escola, Saber a ser Ensinado, e por fim, dentro da sala de aula, Saber Ensinado. Este terceiro e último processo é o momento em que o professor é responsável por um novo momento de transformação, realizando mais uma transposição. Chevallard (1991) denomina este processo como trabalho interno de transposição.

É nesta última etapa em que o professor decide como ensinar, quais aspectos serão considerados, aspectos particulares e subjetivos. Segundo Câmara dos Santos (1995, 1997a apud BRITO MENEZES 2006) "o professor dá uma nova roupagem ao saber, cria um texto didático impregnado pela sua relação ao saber e pela sua subjetividade." (p. 85).

Porém deve-se tomar cuidado com o processo da transformação didática, a fim de que ela não se resuma apenas a uma mera adaptação de um nível complexo, mais elevado,

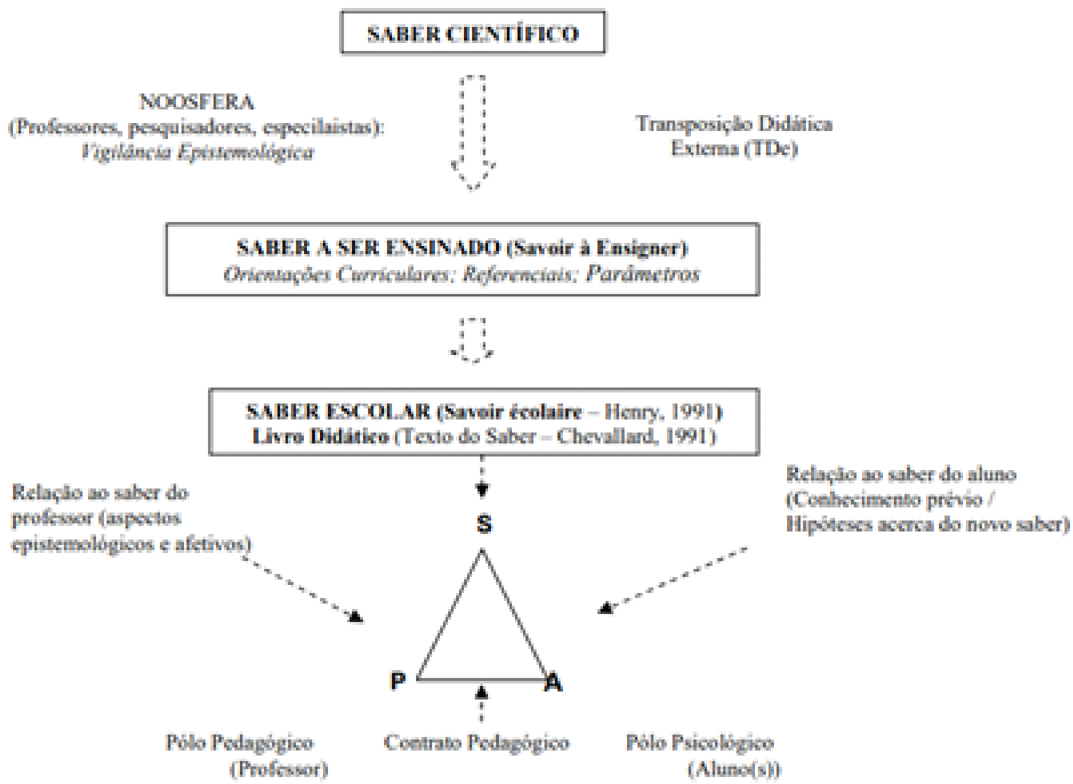


Figura 1: *Esquema da trajetória do Saber na Transposição Didática. Fonte: Esquema da trajetória do Saber na Transposição Didática MATOS FILHO, et al, 2008*

para um nível mais baixo que será ensinado aos estudantes. No trabalho de Brockington e Pietrocola (2005) é colocado que:

> Para o aluno, esta ideia de simplificação do conhecimento transforma-se em um obstáculo ainda maior. A imensa maioria dos conceitos apresentados aos alunos tem pouco (às vezes nenhum) significado para eles. Assim, aquilo que lhes é ensinado difere totalmente do que vivenciam fora da escola. Com isso, raramente conseguem aplicá-los em qualquer outra situação que não sejam aquelas fornecidas dentro da sala de aula. (BROCKINGTON e PIETROCOLA, 2005, p.2)

Por fim, segundo Weckerlin, E. R; Machado, V. M. (2013), após a análise dos 43 artigos que evidenciam a teoria da transposição didática, concluem que apesar de ser aplicada em diversos trabalhos de pesquisa em ensino, a transposição didática é ainda uma alternativa para pesquisa em ensino de ciência, pois traz um novo olhar sobre o saber sábio que permite a consideração do processo social na construção do saber ensinado.

Na próxima seção, será discutido o formalismo da métrica de Minkowski.

III. Métrica de Minkowski

A teoria da Relatividade Especial exige uma nova estrutura que descreva o tempo e o espaço. As transformações de Lorentz mostram uma interdependência entre o espaço e tempo, onde a antiga estrutura newtoniana, onde são válidas as transformações de Galileu, não é mais suficiente. Minkowski em 1908 propõe essa nova estrutura (MINKOWSKI, 1952).

Nesta seção será desenvolvida a estrutura algébrica da Métrica de Minkowski.

Considere um sistema de referência S, definido em um espaço quadridimensional. Pode-se representar suas componentes por:

$$x^0 = ct \tag{1}$$

$$x^1 = x \tag{2}$$

$$x^2 = y \tag{3}$$

$$x^3 = z \tag{4}$$

em que c representa a velocidade da luz no vácuo.

Considere dois referenciais, o referencial S representa um referencial fixo em relação à Terra e o S′ um referencial que se move com velocidade constante em relação a S. Segundo Neto (2017), podemos relacionar dos sistemas S e S′ por:

$$x'^0 = x'^0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{5}$$

$$x'^1 = x'^1(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{6}$$

$$x'^2 = x'^2(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{7}$$

$$x^{'3} = x^{'3}(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3) \tag{8}$$

Sua diferenciação total é:

$$dx^{'\mu} = \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^0}dx^0 \; + \; \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^1}dx^1 + \; \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^2}dx^2 \; \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^3}dx^3 \tag{9}$$

Podendo ser compactada em

$$dx^{'\mu} = \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu} \tag{10}$$

Para um campo escalar arbitrário φ

$$\varphi\,(x^{\mu}) = \; \varphi\left(x^{'\mu}\right) \tag{11}$$

Derivando o campo escalar arbitrário em relação à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{'\mu}} = \; \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{'\mu}}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}} \tag{12}$$

A equação (12) e a equação (10) representam duas maneiras diferentes a uma transformação. Respectivamente denominadas de covariante e contravariante. Para um vetor V qualquer:

$$V^{'}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{'\mu}}V_{\nu} \tag{13}$$

$$V^{'\mu} = \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\nu}}V_{\nu} \tag{14}$$

O elemento de comprimento é expresso por:

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{15}$$

O mesmo pode ser representado por um produto escalar.

$$ds^2 \;=\; d_{\mu}dx^{\mu} \tag{16}$$

Ou seja,

$$dx_{\mu} = \; g_{\mu\nu}dx^{\nu} \tag{17}$$

em que $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico. Assim, o tensor métrico relacionado a métrica de Minkowski é

$$g_{\mu\nu} \;=\; \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Desta forma, a métrica de Minkowski é definida como:

$$ds^2 \ = \ dx_0 dx^0 + \ dx_1 dx^1 + \ dx_2 dx^2 + \ dx_3 dx^3 \tag{19}$$

$$ds^2 = \ c^2 dt^2 \ - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{20}$$

Aplicando o tensor métrico associado ao elemento de linha de espaço tridimensional euclidinano nas equações (19) e (20), obtemos como resultado a métrica do espaço euclidiano.

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$ds^2 \ = dx^1 dx^1 + \ dx^2 dx^2 + \ dx^3 dx^3 \tag{22}$$

$$ds^2 \ = \left(dx^1\right)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{23}$$

No trabalho de Silva (2017) cujo título é A Estrutura erigida para a Relatividade de Einstein: o espaço-tempo de Minkowski, ele afirma:

> O espaço-tempo de Minkowski é $\mathbb{R}^4$, que contém uma métrica de Lorentz. Vale ressaltar que foi Minkowski quem traduziu à teoria da relatividade restrita a linguagem do espaço-tempo, em 1907, isto é, foi ele que reconheceu a real consequência da teoria: unificação do espaço e do tempo em uma só unidade. (SILVA, 2017, p.69).

IV. Diagramas Espaço-Tempo de Minkowski

Albert Einstein apresentou a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) em 1905. Logo após, seu antigo professor Hermann Minkowski mostrou que a TRR poderia ser representada geometricamente como uma teoria do espaço-tempo tetradimensional, sendo três coordenadas espaciais e uma temporal.

De acordo com Polito (2016), Minkowski observou que o espaço e o tempo podiam ser interpretados como coordenadas em um espaço pseudo-euclidiano de quatro dimensões.

O espaço tetradimensional da TRR é chamado de espaço-tempo de Minkowski, cuja métrica é dada pela distância entre dois eventos

$$\Delta s^2 = \ -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{24}$$

Nesta métrica se faz c = 1, e o sinal negativo é adotado por convenção e conveniência.

O espaçotempo pode ser classificado em: tipo espaço, tipo tempo e tipo luz.

- Se Δs > 0, é classificado como tipo espaço, ou seja, separa eventos que não podem comunicar-se entre si.
- Se Δs $= 0$, o intervalo é classificado como tipo luz e correspondem, por exemplo, a um pulso de luz.

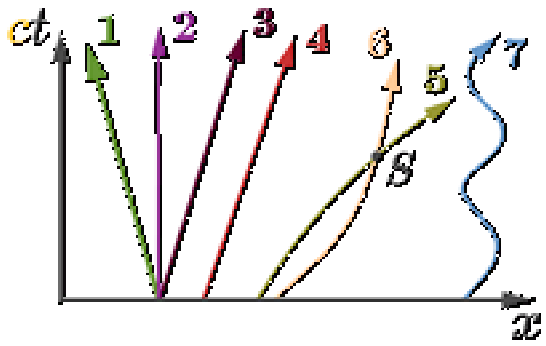


Figura 2: *Sete linhas mundo. Fonte: https://en.universaldenker.org/illustrations/552*

- Se $\Delta s < 0$, o intervalo é classificado como tipo tempo. Considerando que nenhuma partícula material foi observada se movendo com uma velocidade mais rápida do que a luz no vácuo, todas as linhas mundo das partículas são do tipo tempo.

Uma linha mundo pode ser definida como uma curva no espaço-tempo em que as posições de uma partícula são plotadas ao longo de sua existência. Cada objeto tem sua própria linha mundo dentro de um sistema de referência. A linha mundo descreve assim todo o passado e o futuro do objeto (Henning 2019)

A figura 2 ilustra sete linhas mundo em que algumas possibilidades são exploradas.

- Linha Mundo 1 - este corpo se move para a esquerda com velocidade constante.
- Linha Mundo 2 - este corpo está em repouso em uma determinada posição.
- Linha Mundo 3 - este corpo se move com velocidade constante para longe do corpo 2 e para a direita.
- Linha Mundo 4 - este corpo se move com a mesma velocidade que o corpo da linha mundo 3. Ele se move para a direita com uma distância fixa em relação a linha mundo 3.
- Linha Mundo 5 - este corpo é bastante rápido e acelera quase à velocidade da luz no vácuo. No evento **S** encontra o corpo 6.
- Linha Mundo 6 - este corpo se move quase à velocidade da luz e desacelera até parar.
- Linha Mundo 7 - este corpo balança para frente e para trás da direita para a esquerda.

V. Sequência Didática - Diagrama Espaço-Tempo de Minkowski: uma abordagem para o Ensino Médio.

Nesta seção, será desenvolvida uma proposta de transposição didática do Espaço de Minkowski para estudantes do Ensino Médio. Conforme discutido no capítulo 1, deve-se ter o cuidado para que na transposição os conceitos não sofram deformações que os descaracterize. Ainda sobre os princípios da teoria da transposição didática, o professor do

Ensino Médio fará a última transposição considerando a realidade social do estudante bem como os objetivos da instituição de ensino.

É evidente que a álgebra que descreve a Métrica de Minkowski, aqui apresentada na seção III, está acima dos temas desenvolvidos pela matemática do Ensino Médio. O que poderia ser visto como um impasse para a transposição didática.

Na seção IV, a partir das linhas mundo, uma representação gráfica, visual, parece ser uma boa saída para esse impasse matemático. Gráficos S x t (posição versus tempo) são largamente discutidos nas aulas de física desde o 9ž ano do ensino fundamental. Deve-se utilizar este domínio como ponto de partida para introduzir o diagrama espaço tempo de Minkowski.

Para exemplificar, será resolvida a questão P2.3 do livro "A General Relativity Workbook", de Thomas A. Moore.

A transposição didática se dará por meio de uma sequência didática, pois esta forma organiza o processo de início, meio e fim, sendo então uma facilitadora da aprendizagem. Zabala define a sequência didática como:

> Uma sequência didática se refere a um conjunto de atividades, estratégias e intervenções planejadas etapa por etapa pelo docente para que o entendimento do conteúdo ou tema proposto seja alcançado pelos discentes. São planejadas e desenvolvidas atividades para a realização de determinados objetivos educacionais, com início e fim conhecidos tanto pelos professores, quanto pelos alunos. (ZABALA, 1998, p.28).

1. Objetivo Geral: Apresentar o diagrama espaço-tempo de Minkowski como uma alternativa para a compreensão da Relatividade Especial.

2. Conteúdo:

   - Noções de Cinemática: trajetória, origem, referencial, posição, velocidade e aceleração. Gráfico de Posição x Tempo.
   - Diagrama de Minkowski
   - Linha Mundo
   - Aplicação do diagrama de Minkowski na resolução de um exercício do livro "A General Relativity Workbook", de Thomas Moore.

3. Público-alvo: Estudantes do Ensino Médio

4. Motivação (objetivos específicos):

   - Contribuir com o letramento científico a partir de conceitos da Relatividade Especial.
   - Apresentar uma alternativa para a discussão da Relatividade.
   - Aumentar o interesse dos estudantes do Ensino Médio por temas contemporâneos da Física.

5. Duração: 3 aulas de 40 minutos.

Nos apêndices A-C apresentamos a organização das aulas.

V.1. Resolução do exercício proposto

V.1.1 Enunciado original:

P2.3 At t = 0, an alien spaceship passes by the earth: let this be event A. At t = 260 Gm (according to synchronized clocks on earth and Mars) the spaceship passes by Mars, which is 100 Gm from the earth at the time: let this be event B. (Note that 18 Gm of time = 1.8 x 10^{10} m =$\sim$ 1 minute).

Radar tracking indicates that the spaceship moves at a constant velocity between the earth and Mars. Just after the ship passes the earth, people on the earth launch a probe whose purpose is to catch up with and investigate the spaceship. This probe accelerates away from the earth, moving slowly at first, but moves faster and faster as time passes, eventually catching up with and passing the alien ship just as it passes Mars. In all parts of this problem, you can ignore the effects of gravity and the relative motion of the earth and Mars (which are small) and treat the Earth and Mars as if they were both at rest in the inertial reference frame of the solar system. The probe takes some pictures of the alien spacecraft at event B, and immediately sends them encoded as in a burst of laser light back to the earth. The burst arrives at the earth at event C.

a. Use graph paper to draw a quantitatively accurate two-dimensional spacetime diagram of the situation in the solar system frame, showing the worldlines of the earth, Mars, the alien spacecraft, the probe, and the flash of laser light (which you can treat as if it were a particle). Let the position of the earth define x = 0 in that frame. Note that it is conventional in spacetime diagrams to calibrate the t and x axes so that they have scales of the same size expressed in the same units (in this case, steps of 20 Gm will probably be appropriate). Also note that the probe's worldline can never have a slope less than 1 (because it cannot move faster than light).

b. Explain how you determined the time coordinate of event C.

c. Use the metric equation to calculate the time that elapses between events A and B in the alien space-ship's frame. (Hint: Note that since the spaceship is present at both events, they. occur at the same place, the spaceship's location, in the spaceship's frame.)

V.1.2 Enunciado traduzido:

Em t = 0, uma nave alienígena passa pela Terra: seja este o evento A. Em t = 260 Gm (de acordo com os relógios sincronizados na Terra e em Marte), a nave passa por Marte, que está a 100 Gm da Terra no momento: seja este o evento B. (Observe que 18 Gm de tempo = 1,8 x 10^{10} m é aproximadamente 1 minuto). O rastreamento do radar indica que a espaçonave se move a uma velocidade constante entre a Terra e Marte. Logo depois que a nave passa pela Terra, as pessoas na Terra lançam uma sonda cujo objetivo é alcançar e investigar a espaçonave. Esta sonda acelera para longe da Terra, movendo-se lentamente no início, mas se move cada vez mais rápido com o passar do tempo, eventualmente alcançando e passando pela nave alienígena assim que ela passa por Marte. Em todas as partes deste problema, você pode ignorar os efeitos da gravidade e do movimento relativo da Terra e de Marte (que são pequenos) e tratar a Terra e Marte como se ambos estivessem em repouso no referencial inercial do sistema solar. A sonda tira algumas fotos da espaçonave alienígena no evento B e as envia imediatamente codificadas como em uma explosão de luz laser de volta à Terra. A explosão chega à Terra no evento C.

1. Use papel milimetrado para desenhar um diagrama de espaço-tempo bidimensional quantitativamente preciso da situação na estrutura do sistema solar, mostrando as linhas de mundo da Terra, Marte, a espaçonave alienígena, a sonda e o flash de luz laser (que você pode tratar como se fosse uma partícula). Deixe a posição da Terra definir x = 0 nesse quadro. Não que seja convencional em diagramas de espaço-tempo calibrar os eixos t e x de modo que eles tenham escalas do mesmo tamanho expressas nas mesmas unidades (neste caso, passos de 20 Gm provavelmente serão apropriados). Observe também que a linha de mundo da sonda nunca pode ter uma inclinação menor que 1 (porque ela não pode se mover mais rápido que a luz).

2. Explique como você determinou a coordenada de tempo do evento C.

3. Use a equação métrica para calcular o tempo que decorre entre os eventos A e B na estrutura da nave alienígena. (Dica: Observe que, uma vez que a espaçonave está presente em ambos os eventos, eles ocorrem no mesmo lugar, a localização da espaçonave, no quadro da espaçonave.)

V.1.3 Resolução:

Começamos analisando a afirmação “Observe que 18 Gm de tempo = 1,8 x 10^{10} m é aproximadamente 1 minuto”. Esta igualdade pode gerar um desconforto inicial nos estudantes. Uma vez que há uma igualdade entre grandezas físicas diferentes, distância e tempo. Esse incômodo pode ser sanado executando o cálculo para determinar qual distância é percorrida pela luz num intervalo de tempo igual a 1 minuto.

Assim, o tempo é medido em quantos metros a luz viajaria neste intervalo de tempo. Matematicamente: sendo c = 3 . 10^8 m/s, em um intervalo de tempo de 1 minuto (60 segundos) a luz percorre:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{25}$$

$$3.10^8 = \frac{\Delta x}{60} \tag{26}$$

Δx = 18.10^9 m. Usando o múltiplo Giga, 1 giga = 10^9, temos a correspondência 1 minuto = 18 Gm.

Mesmo assim é provável que o estudante questione como podemos igualar minuto com metros. Mais uma vez fica evidenciado a dificuldade em realizar uma boa transposição didática.

a) Considerando a sugestão do autor do livro é importante fazer o uso de um papel milimetrado. Considere que alguns estudantes ainda possam apresentar dificuldade em

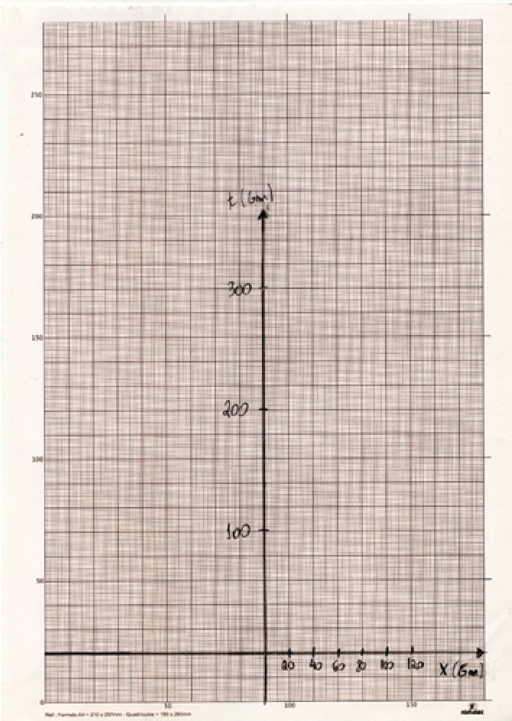


Figura 3: *Eixos para o diagrama de Minkowski. Fonte: Elaboração dos autores.*

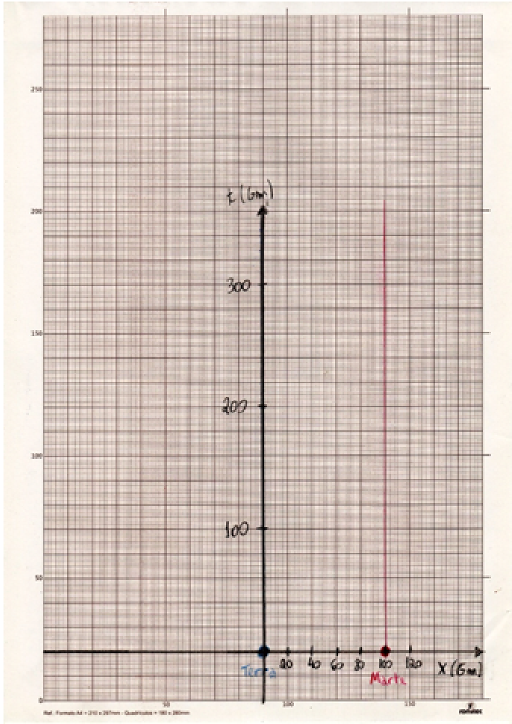


Figura 4: *Linha Mundo de Marte. Fonte: Elaboração dos autores.*

plotar os pontos para desenhar as linhas mundo. A construção do gráfico na aula 1 da sequência didática teve também como objetivo preparar os estudantes para este momento. Utilize a seguinte escala: 1 cm no papel milimetrado corresponde a 20 Gm.

Considerando a Terra e Marte em repouso, conforme o enunciado proposto, as linhas mundo, preta e vermelha respectivamente, ficam sendo retas verticais no diagrama de Minkowski.

A linha mundo da Nave, linha verde, é uma reta, pois o enunciado afirma que o movimento é uniforme, passa pela Terra no instante t = 0 Gm e alcança Marte no instante t = 260 Gm.

A linha mundo da Sonda, linha cinza, não é uma reta, pois o movimento é acelerado. O desenho da linha quase vertical, vai inclinando, indicando a aceleração. Observe que a inclinação não pode ser menor do que 1, pois indicaria que a Sonda se movimenta mais rápida do que a luz.

A linha mundo do Laser, linha amarela, esta reta possui inclinação igual a 1, pois a informação com a fotografia viaja com a velocidade da luz.

a) O evento C corresponde a chegada das fotos tiradas pela Sonda na Terra. Pelo gráfico construído é fácil perceber que a linha mundo da Terra, linha preta, intercepta a linha mundo da Sonda, linha amarela, no instante t = 360 Gm

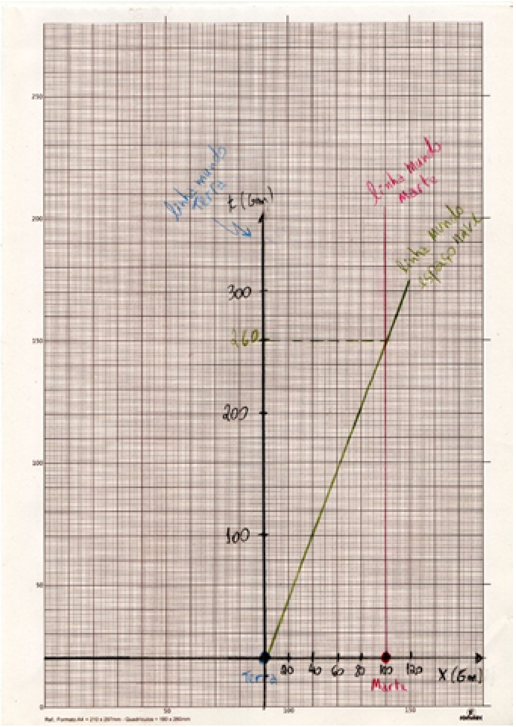


Figura 5: *Linha Mundo da Espaçonave. Fonte: Elaboração dos autores*

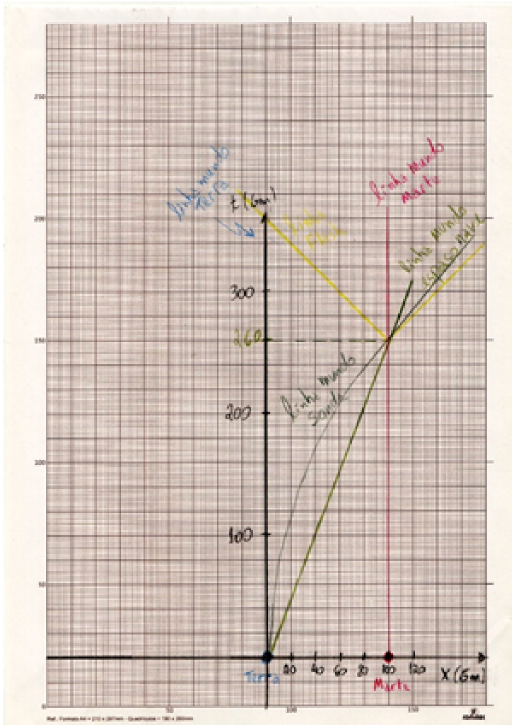


Figura 6: *Linha Mundo do Laser. Fonte: Elaboração dos autores.*

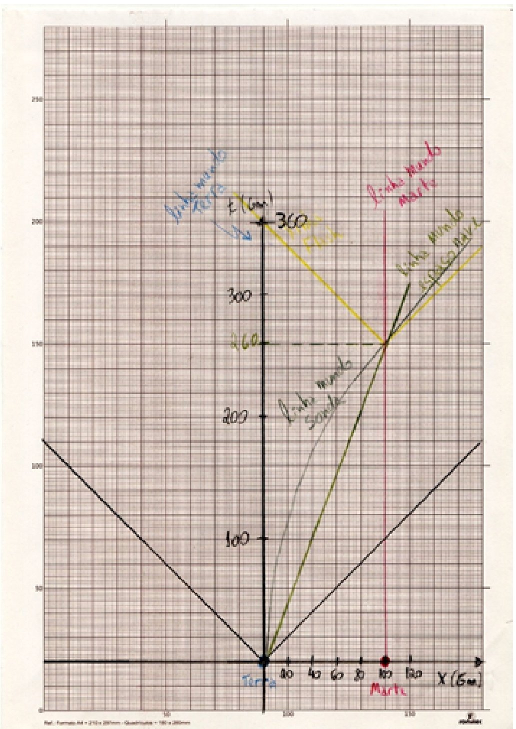


Figura 7: *Linha Mundo Flash. Fonte: Elaboração dos autores.*

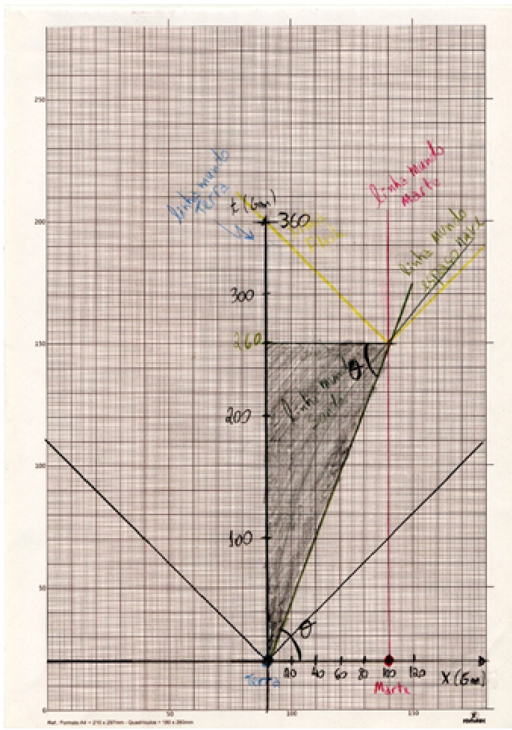


Figura 8: *Linhas Mundo. Fonte: Elaboração dos autores.*

1. Começamos calculando o fator de Lorentz, fator γ.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v\check{s}}{c\check{s}}}} \tag{27}$$

Para determinar a velocidade v da espaçonave podemos fazer a cotangente do ângulo da reta que representa a linha mundo da espaçonave. Neste ponto os estudantes podem questionar o uso da cotangente, uma vez, que no gráfico S x t, a tangente corresponde a velocidade. Vale lembrar aos estudantes que no espaço de Minkowski o eixo y corresponde ao tempo e o eixo x corresponde às posições.

Pode-se observar na figura 8. No triângulo hachurado:

$$\cot\theta = \frac{100}{260} \tag{28}$$

$$v = \cot\theta \tag{29}$$

$$v = 5/13 \tag{30}$$

Como c = 1, temos que

$$\beta = \frac{v^2}{c^2} \tag{31}$$

$$\beta = \frac{25}{169} \tag{32}$$

Assim,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{129}}} \tag{33}$$

$$\gamma = \frac{13}{12} \tag{34}$$

Fazendo o uso da transformação de Lorentz, e fazendo $\Delta y = 0$ e $\Delta z = 0$

$$\Delta t' = \gamma\Delta t - \gamma\beta\Delta x \tag{35}$$

$$\Delta t' = \frac{13}{12}260 - \frac{13}{12}\frac{5}{13}100 \tag{36}$$

$$\Delta t' = 240\,Gm \tag{37}$$

Neste momento vale a pena usar a relação do enunciado que diz: "18 Gm de tempo = 1,8 x 10^{10} m é aproximadamente 1 minuto" e calcular quantos minutos equivale a 240 Gm.

$$\Delta t' = \frac{240}{18} \tag{38}$$

$$\Delta t' = 13 \text{ minutos e } 20 \text{ segundos} \tag{39}$$

VI. Considerações Finais

Realizar a transposição didática da Teoria da Relatividade para o Ensino Médio deve ser vista com uma atividade complexa, porque de um lado se tem o rigor epistemológico inerente da Física, que está muito distante do entendimento do senso comum. E por outro lado temos as exigências do sistema educacional, com um currículo extenso e, considerando as dimensões continentais do Brasil, há uma enorme diversidade cultural, o que cria uma dificuldade na transposição adequada a todos os estudantes.

Acredita-se que o trabalho aqui desenvolvido seja uma possibilidade plausível para a discussão de linhas mundo do espaço de Minkowski no Ensino Médio uma vez que, apesar da simplificação dos conceitos, foi preservada a Física e seus resultados teóricos.

Por fim, este trabalho tem também como objetivo ser aplicado para estudantes e, após análise dos resultados, poderá se tornar um artigo científico mostrando a eficácia (ou não) dessa transposição didática.

Referências

BRITO MENEZES, A.P.A.. Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6ž Série do Ensino Fundamental. Tese de Doutorado não publicada, UFPE, 2006.

BROCKINGTON, Guilherme; PIETROCOLA, Maurício. Serão as regras da transposição didática aplicáveis aos conceitos de Física moderna? Investigações em Ensino de Ciências, v. 10(3), p. 387-404, 2005.

CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

COUTO, A. O.F.; ANDRADE, A.F.A estrutura do espaço de Minkowski. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA E INOVAÇÃO (SemPI), III., 2019. Formiga. Anais eletrônicos[...]. Formiga: IFMG –CampusFormiga, 2019.

MATOS FILHO, M. A. S.; et al. A Transposição Didática em Chevallard: As Deformações/Transformações Sofridas pelo Conceito de Função em Sala de Aula. In: Congresso Nacional de Educação, 8, 2008, Curitiba.

MOORE, Thomas A. (Thomas Andrew) A general relativity workbook / Thomas A. Moore, Pomona College.

MINKOWSKI, H. Space and Time. In: LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H. The Principles of Relativity: a collection of original memoirs on the Special and General Theory of Relativity. New York: Dover Publications, 1952. p. 73-91.

NETO, J. B. Teoria de Campos e a Natureza: parte quântica. 1ł ed. São Paulo: Livraria da

Física, 2017.

POLITO, A. M. M. A construção da estrutura conceitual da física clássica. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

R. HENNING, S. JEGLINSKI, D. MORSE, A Oldenburg Introduction to Spacetime diagrams in Special Relativity. 2019

SILVA, J. J. A estrutura erigida para a relatividade de Einstein: o espaço-tempo de Minkowski. Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada, vol. 4, n. 2, dezembro, 2017. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbfta/article/download/7155/4682>. Acesso em: 12 de dezembro de 2018.

TAYLOR, E.; WHEELER, J. A. Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity. 2nd. Edition, Freeman, 1992.

WECKERLIN, E. R; MACHADO, V. M. A Teoria da Transposição Didática: uma análise de periódicos CAPES na área do ensino de ciências, 2013.

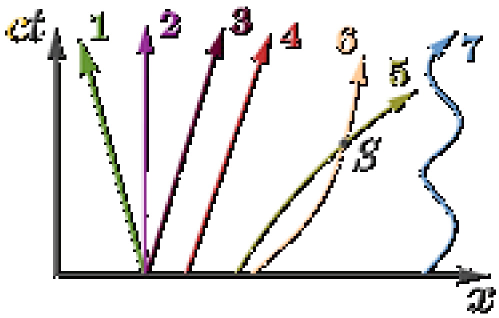
A. 1a. AULA

Retomada dos conceitos de cinemática.

Objetivo	Nivelar os conceitos básicos entre os estudantes a fim de que todos possam participar de forma efetiva do processo de ensino-aprendizagem.
Conteúdo	Cinemática
Assunto relevante	Conceitos Básicos: trajetória, origem, referencial, posição, velocidade e aceleração
Tempo de aula	40 min
Recurso didático a ser abordado.	Computador/Projetor
ATIVIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	
Aula 1	A primeira etapa consistirá em um bate-papo sobre situações do cotidiano dos estudantes. Considerando aqui a forma de locomoção entre a casa e a escola, os meios de transportes usados para suas viagens. Neste momento é importante que o professor faça uma leitura assertiva do perfil da turma, isto é, quais conceitos físicos relacionados ao movimento estão bem definidos e quais precisam de uma atenção maior. Na segunda etapa os estudantes serão convidados a pensar na seguinte questão-problema: **Questão-problema** Como descrever graficamente a posição ocupada por mim desde acordar até a chegada na escola em função do tempo? **Questões motivadoras** Se o meu transporte é o carro ou o ônibus, meu gráfico seria diferente? Podemos representar no mesmo sistema de coordenadas os gráficos de dois alunos? Caso esses gráficos tivessem pontos em comum, o que isto significaria? Qual o significado físico da inclinação da reta tangente em relação à curva em qualquer ponto do gráfico? **Atividade** Cada estudante deverá construir um gráfico Posição versus Tempo que represente seu descolamento entre sua e casa e a escola.

B. 2A. AULA

Diagrama Espaço Tempo de Minkowski

Objetivo	Apresentar o diagrama de Minkowski, definir intervalo: tipo-tempo, tipo-espaço tipo-luz e traçar linhas mundo.
Conteúdo	Diagrama Espaço-Tempo
Assunto relevante	Relatividade Especial, Espaço-Tempo de Minkowski
Tempo de aula	40 min
Recurso didático a ser abordado.	Computador/Projetor
ATIVIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	
Aula 2	A primeira etapa consistirá em resgatar os gráficos realizados pelos estudantes na aula 1. Usando um ou dois como exemplos para apreciação da turma. A segunda etapa será a apresentação do Espaço-Tempo de Minkowski. Enfatizar as grandezas físicas representadas em cada eixo. Com uma simplificação, escrever a métrica de Minkowski: $\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ Considerando apenas a direção x $\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2$ Introduzir o conceito de intervalo (tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz) Desenhar no diagrama uma linha mundo para cada tipo de intervalo. **Atividade** A partir da figura abaixo, os estudantes devem sugerir movimentos que estão representados em cada linha mundo 

C. 3a. AULA

Resolução de uma questão de Relatividade Especial proposta no livro: "A General Relavity Workbook", de Thomas Moore.

Objetivo	Resolver um exercício em busca da sistematização do diagrama de Minkowski.
Conteúdo	Diagrama Espaço-Tempo – Resolução de exercício
Assunto relevante	Relatividade Especial, Espaço-Tempo de Minkowski
Tempo de aula	40 min
Recurso didático a ser abordado.	Computador/Projetor
ATIVIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	
Aula 3	A primeira etapa consistirá na leitura do enunciado da questão proposta. A segunda etapa será uma breve discussão com os estudantes sobre o problema proposto. Buscando instigá-los para possíveis soluções. Distribuição do papel milimetrado, conforme sugerido pelo autor do exercício, Thomas Moore. **Atividade** Resolver a questão proposta. Construir o diagrama de Minkowski. Desenhar as cinco linhas mundo: Terra, Marte, Nave, Sonda e Laser. Calcular o tempo que decorre entre os eventos A e B na nave alienígena.